Taller de preparación para la fase local de la OME

Sesión 4/12/2020

(1999) Halla todos los pares de números naturales x, y ($x < y$) tales que la suma de todos los números naturales comprendidos estrictamente entre ambos es igual a 1999.

(2000) Considérese la sucesión definida como $a_1 = 3$, y $a_{n+1} = a_n + a_n^2$. Determínense las dos últimas cifras de a_{2000}

(2001) Halla el número natural n que es el producto de los primos *p, q y r*, sabiendo que:

$$r - q = 2p \quad \text{y} \quad rq + p^2 = 676$$

(2002) Encuentra todos los enteros positivos m y n tales que $n! + 1 = (m! - 1)^2$.

(2004) Hallad todas las posibles formas de escribir 2003 como suma de dos cuadrados de números enteros positivos.

(2004) Hallad las cuatro últimas cifras de 3^{2004}.

(2005) Encontrar todos los números enteros positivos n tales que $3^n + 5^n$ es múltiplo de $3^{n-1} + 5^{n-1}$.

(2005) Demostrar que la ecuación
$x^2 + y^2 - z^2 - x - 3y - z - 4 = 0$
posee infinitas soluciones en números enteros.

(2006) Encontrar, razonadamente, dos números enteros positivos a y b, tales que
b^2 múltiplo de a,
a^3 múltiplo de b^2,
b^4 sea múltiplo de a^3,
a^5 sea múltiplo de b^4,
pero b^6 no sea múltiplo de a^5.

(2006) ¿Existe un conjunto infinito de números naturales que NO se pueden representar en la forma
n^2+p
siendo n natural y p primo? Razónese la contestación.

(2007) Sean a, b, c, d números enteros positivos que satisfacen $ab = cd$. Demostrar que $a + b + c + d$ no es un número primo.

(2007) Encontrar todas las soluciones enteras posibles, x e y, de la ecuación $p(x+y)=xy$
siendo p un cierto número primo.

(2008) Demuestra que $2222^{5555} + 5555^{2222}$ es múltiplo de 7.

(2008) Sea m un entero positivo. Demuestra que no existen números primos de la forma
$2^{5m} + 2^m + 1$.

(2009) Probar que para todo entero positivo $n^{19} - n^{7}$ es divisible por 30.

(2010) Decimos que un conjunto E de números naturales es especial cuando al tomar dos elementos cualesquiera distintos $a, b \in E$ se tiene que $(a - b)^2$ divide al producto ab.
(a) Encuentra un conjunto especial formado por tres elementos.
(b) ¿Existe un conjunto especial formado por cuatro números naturales que están en progresión aritmética?

(2011) Calcula todos los números enteros a, b y c tales que $a^2 = 2b^2 + 3c^2$

(2011) Halla todas las ternas de números enteros positivos $a \le b \le c$ primitivas (es decir, que no tengan ningún factor primo común) tales que cada uno de ellos divide a la suma de los otros dos.

(2013) Hallar todas las soluciones enteras (x, y) de la ecuación
$y^k = x^2 + x$
donde k es un número entero dado mayor que 1.

(2014) Hallar las soluciones enteras de la ecuación
$x^4 + y^4 = 3x^3 y$

(2014) Probar que
$2014^{2013} - 1013^{2013} - 1001^{2013}$
es múltiplo de
$2014^3 - 1013^3 - 1001^3$

(2015) Los enteros positivos x, y, z cumplen
$x + 2y = z$,
$x^2 - 4y^2 + z^2 = 310$
Halla todos los posibles valores del producto xyz.

(2016). Para pertenecer a un club cada nuevo socio debe pagar como cuota de inscripción a cada miembro del club la misma cantidad que él tuvo que pagar en total cuando ingresó más un euro. Si el primer socio pagó un euro, ¿cuanto deberá pagar en total el n-ésimo socio?

(2017) Describir todas las soluciones enteras positivas (m, n) de la ecuación $8m - 7 = n^2$ y dar el primer valor de m (si existe) mayor que 1959.

(2018) ¿De cuántas maneras se puede escribir 111 como suma de tres números enteros en progresión geométrica?

(2018) Sea n un número natural. Probar que si la última cifra de 7^n es 3, la penúltima es 4.

(2020) Demostrar que la suma de los divisores positivos de un número de la forma $3k + 2$ siempre es un múltiplo de 3.